

## **ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ШКОЛЕ**

**Гриншпон Я.С., кандидат физико-математических наук, доцент,  
Томский государственный университет, г. Томск  
grinshpon@mail.ru**

**Лемешко Д.Д., магистрант  
Томский государственный университет, г. Томск  
dmitriy-lemeshko@mail.ru**

*Аннотация.* Многие задачи элементарной теории чисел можно решать как методами математики, так и методами информатики. Подобные задачи входят в варианты ЕГЭ и различных олимпиад и конкурсов. Исследованию таких задач целесообразно посвятить специальный междисциплинарный курс.

*Ключевые слова:* концепция числа, элементарная теория чисел, междисциплинарные связи, методика обучения математике и информатике.

## **FEATURES OF SOLVING PROBLEMS IN NUMBER THEORY WHEN STUDYING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE AT SCHOOL**

**Ya.S. Grinshpon., associate professor,  
Tomsk state university, Tomsk  
grinshpon@mail.ru**

**D.D. Lemeshko, master  
Tomsk state university, Tomsk  
dmitriy-lemeshko@mail.ru**

*Abstract.* Many problems of elementary number theory can be solved by using both mathematical and computer methods. Such problems are included in final exam and various olympiads and competitions. It is wise to devote a special interdisciplinary course to the study of such problems.

*Keywords:* number concept, elementary number theory, interdisciplinary relations, teaching methods in mathematics and computer science.

Понятия числа является одним из фундаментальных понятий современного естествознания. Учащиеся школ оперирует числами в большей или меньшей степени на уроках практически по всем предметам. Наиболее часто числа встречаются в курсах математики, информатики и ИКТ, физики и химии.

Однако, безусловно, главная роль в осознании концепции числа (натуральные числа  $\rightarrow$  целые числа  $\rightarrow$  рациональные числа  $\rightarrow$  действительные числа) и в изучении свойств различных числовых систем принадлежит математике. При этом приобретение уверенных навыков по выполнению различных операций с действительными числами и по применению этих навыков при решении разнообразных задач естествознания, допускающих математическое числовое моделирование, невозможно без крепкого усвоения фундамента построения числового смыслового пространства. Таким фундаментом являются множества натуральных и целых чисел. Именно поэтому столь важны вопросы элементарной теории чисел, изучаемые в рамках общего среднего образования.

К элементарной теории чисел традиционно относят вопросы, связанные с понятием целого числа, для решения которых не привлекаются методы математического анализа. Это вопросы записи целых чисел (системы счисления), выполнимости арифметических операций над целыми числами (делимость), решения уравнений в целых числах (диофантовы уравнения).

Формирование понятия числа и изучение свойств чисел осуществляется не только на уроках математики, но и на уроках информатики и ИКТ. Действительно, программирование на многих языках требует умения описывать используемые в программе числовые данные, причем необходимо четко формулировать являются ли используемые числа постоянными (константы) или они могут изменяться в ходе выполнения программы (переменные), а также определять тип этих данных. При этом тип данных часто влияет на набор возможных операций, выполняемых над числами (например, операции нахождения остатка и неполного частного определены только для целочисленных типов). Кроме того, задачи, связанные с системами счисления (перевод чисел из одной позиционной системы счисления в другую, выполнение арифметических операций и сравнение чисел в различных позиционных системах счисления), на уроках информатики обсуждаются более подробно, чем на уроках математики.

Отметим также, что у большинства учащихся российских школ теоретико-числовые задачи вызывают живой интерес. Одна из причин данного интереса – это понятные и естественные формулировки таких задач, простота проверки их условий для частных случаев, возможность решения некоторых из этих задач путем перебора возможных вариантов. Данный интерес стимулируется постоянным включением теоретико-числовых задач в олимпиады и конкурсы различного уровня и в КИМ ЕГЭ по математике и информатике.

Существует большой класс теоретико-числовых задач, допускающих как строго доказательное математическое решение, так и решение методами информатики путем проведения вычислительного эксперимента на компьютере. Более того эти два подхода хорошо дополняют друг друга: вычислительный эксперимент помогает увидеть верный ответ и тем самым подсказать ход теоретического решения, математическое же решение объясняет, почему только данные ответы удовлетворяют условию задачи.

Следовательно, для расширения кругозора школьников путем установления ими междисциплинарных связей математики и информатики было бы полезно рассматривать такие задачи на специальных межпредметных уроках.

Цель данной работы заключается в составлении банка таких задач и разработке цикла занятий по курсу «Решение теоретико-числовых задач методами математики и информатики». Для программной реализации задач на компьютере был выбран язык программирования Pascal ABC.net, хорошо знакомый школьникам по базовому курсу информатики.

Курс рассчитан на 10 академических часов. Занятия проводятся один раз в неделю по одному уроку в течение четверти.

Содержание курса:

- повторение основ программирования;
- знакомство с языком программирования PascalABC.NET;
- повторение основ теории чисел;
- решение базовых задач;
- решение олимпиадных задач.

Результаты освоения курса:

- владение синтаксисом языка программирования PascalABC.NET;
- знание основных законов теории чисел;
- умение составлять алгоритмы решения теоретико-числовых задач и программировать их;
- знакомство с основными идеями, применяемыми при решении теоретико-числовых задач в математике.

При подборе задач для курса необходимо обращать внимание на то, что вычислительный эксперимент имеет существенные ограничения на свое применение, так как он позволяет проводить перебор только конечного числа вариантов, в частности, он эффективен при необходимости перебора всех натуральных чисел с известным количеством цифр (двузначные числа, трехзначные числа и т.д.), но неприменим для перебора всех элементов бесконечного подмножества во множестве натуральных чисел (всех натуральных чисел, всех четных чисел, всех простых чисел и т.д.). Например, рассмотрим три похожие по содержанию и математическому решению задачи:

а) Приведите пример натурального числа, которое увеличивается в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

б) Найдите все двузначные натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль;

в) Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

Математически эти три задачи решаются практически одинаково. Запишем искомое число в виде  $10a + b$ , где  $b$  – последняя цифра числа,  $a$  – число, составленное из всех цифр, кроме последней. Получим уравнение  $100a + b = 9(10a + b)$ . Отсюда  $5a = 4b$ . Так как  $b$  – это цифра,  $b$  делится на 5 и  $a \neq 0$ , то  $b = 5$  и  $a = 4$ . Получаем единственный ответ 45.

Применение же вычислительного эксперимента возможно при решении только задач а) и б). Причем в задаче а) удобно использовать цикл с постусловием, который будет выполняться до тех пор, пока не будет найдено искомое число.

```
var
  chislo, a, b: integer;
begin
  chislo := 9;
  repeat
    chislo := chislo + 1;
    b := chislo mod 10;
    a := chislo div 10;
  until (100 * a + b = 9 * (10 * a + b));
  writeln(chislo);
end.
```

В задаче б) лучше записать два цикла со счетчиками, пробегающими все возможные значения цифр двузначного числа:

```
var
  i, j: integer;
begin
  for i := 1 to 9 do
    begin
      for j := 0 to 9 do
        begin
          if (100 * i + j = 9 * (10 * i + j)) then
            writeln(10 * i + j);
        end;
      end;
    end;
end.
```

В задаче в) цикл неприменим, так как проверка условия должна осуществляться бесконечное число раз.

С другой стороны, вычислительный эксперимент в тех задачах, где он применим, оказывается чаще проще, чем математическое решение. Более того программа, предназначенная для решения некоторой задачи, часто с небольшими модификациями позволяет решать и многие другие схожие задачи, либо решать целый класс однотипных задач.

Сформулируем, например, задачу г), аналогичную задаче б).

г) Найдите все двузначные натуральные числа, которые увеличиваются в 16 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить девять.

Математически задача сводится к уравнению  $100a + 90 + b = 16(10a + b)$ . Отсюда  $6 = 4a + b$ , а значит,  $4a \leq 6$ . Так как  $a \neq 0$ , то  $a = 1$  и  $b = 2$ . Получаем единственный ответ 12.

Программная реализация задачи г):

```
var
  i, j: integer;
```

```

begin
  for i := 1 to 9 do
    begin
      for j := 0 to 9 do
        begin
          if (100 * i + 90 + j = 16 * (10 * i + j)) then
            writeln(10 * i + j);
          end;
        end;
      end;
    end.

```

Обратим внимание, что, несмотря на схожесть условий задач, математические решения содержат принципиальные отличия: если в решении задачи б) использовались соображения делимости, то основной идеей решения задачи г) являлась оценка с помощью неравенств.

С точки же зрения программирования эти задачи решаются практически одинаково. Более того, несложно составить общую программу, которая сможет решить все возможные задачи такого типа, а именно, данная программа для всех допустимых значений параметров  $c$  и  $k$  решит задачу:

д) Найдите все двузначные натуральные числа, которые увеличиваются в  $k$  раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить цифру  $c$ .

```

var
  i, j, c, k: integer;
begin
  readln(c, k);
  for i := 1 to 9 do
    begin
      for j := 0 to 9 do
        begin
          if (100 * i + 10 * c + j = k * (10 * i + j)) then
            writeln(10 * i + j);
          end;
        end;
      end;
    end.

```

Приведем теперь несколько примеров задач, которые планируется разбирать со школьниками. Задачи 1-5 имеют базовый уровень сложности, эти задачи аналогичны задачам 19 из базового ЕГЭ по математике. Задача 6-10 имеют повышенный уровень сложности, эти задачи предлагались на олимпиадах по математике муниципального или регионального уровней.

**Задача 1[2].** Найдите трёхзначное натуральное число, большее 400, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки, и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр.

**Задача 2[2].** Найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 24.

**Задача 3[2].** Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 19, сумма цифр которого на 1 больше их произведения.

**Задача 4[2].** Сумма цифр трёхзначного числа  $A$  делится на 13. Сумма цифр числа  $A + 5$  также делится на 13. Найдите такое число  $A$ .

**Задача 5[3].** Найдите все трёхзначные числа, которые уменьшаются в пять раз при вычеркивании первой цифры.

**Задача 6[3].** Найдите все такие трёхзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

**Задача 7[4].** Найдите такое четырёхзначное число, что первые две его цифры одинаковы, следующие две цифры также одинаковы, а само это число является квадратом натурального числа.

**Задача 8[4].** Числа 1, 2, 3, ..., 2016, 2017 разбиты на две группы. К первой группе отнесены числа с нечетной суммой цифр, ко второй группе – с четной. Что больше: сумма всех чисел первой группы или сумма всех чисел второй группы

**Задача 9[4].** Чему равно максимальное значение разности трехзначного числа и суммы кубов его цифр? Для какого трехзначного числа достигается этот максимум? Чему равно минимальное положительное значение этой разности?

**Задача 10[3].** Первоклассник умеет писать только одну цифру 1. Докажите, что он сможет записать число, делящееся на 2017.

### Литература

1. Носков В.В. Реализация межпредметных связей математики и информатики в современном учебном процессе / Носков В.В., Попова В.В. // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. – 2015. – № 1(31). – С. 65 – 68.
2. Гуцин Д. Д. Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ». [Электронный ресурс] / Гуцин Д. Д. – Режим доступа: <http://ege.sdangia.ru>.
3. Интернет-проект «Задачи». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.problems.ru>.
4. Л. П. Купцов. Российские математические олимпиады школьников: кн. для учащихся / Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, Д. А. Терёшин. – Ростов н/Д: Феникс, 1996. – 640 с.